

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M\_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Számítsa ki a  $(b_n)_{n \geq 1}$  mértani haladvány  $b_4$  tagját tudva azt, hogy  $b_1 = \sqrt{2}$  és  $b_2 = 4$ .
- 5p 2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx^2 - 2x + 1$  függvény, ahol  $m$  nullától különböző valós szám. Határozza meg azt a nullától különböző  $m$  valós számot, amelyre az  $Ox$  tengely érintője az  $f$  függvény grafikus képének!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a  $3^{x+2} - 3^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 6$  egyenletet!
- 5p 4. Legyen  $A$  a kétjegyű természetes számok halmaza. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy az  $A$  halmazból véletlenszerűen kiválasztott  $n$  szám esetén a  $2n - 60$  szám is eleme az  $A$  halmaznak!
- 5p 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adottak az  $A(-1, 4)$  és  $B(5, 2)$  pontok és legyen  $C$  az  $AB$  szakasz felezőpontja. Határozza meg annak a  $d$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $C$  ponton és merőleges az  $AB$  egyenesre!
- 5p 6. Adott az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög, amelyben az  $A$  szög mértéke  $120^\circ$  és  $AB = 6$ . Igazolja, hogy az  $ABC$  háromszög területe  $9\sqrt{3}$ .

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adottak az  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  és  $B(x) = xI_2 + iA$  mátrixok, ahol  $x$  valós szám és  $i^2 = -1$ .
- 5p a) Igazolja, hogy  $\det A = 1$ .
- 5p b) Határozza meg azt az  $x$  valós számot, amelyre  $B(3) \cdot B(5) = 8B(x)$ .
- 5p c) Határozza meg azokat az egész számokból alkotott  $(m, n)$  számpárokat, amelyekre a  $B(m) + iB(n)$  mátrix **nem** invertálható!
2. Az  $M = [1, +\infty)$  halmazon értelmezzük az  $x * y = xy - \sqrt{(x-1)(y-1)}$  műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy  $2 * 5 = 8$ .
- 5p b) Igazolja, hogy az  $e = 1$  a „ $*$ ” művelet semleges eleme!
- 5p c) Bizonyítsa be, hogy  $(nx) * y \geq x(n * y)$ , bármely  $x, y \in M$  és bármely  $n$ ,  $n \geq 2$  természetes szám esetén!

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2 + 3}$  függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy  $f'(x) = \frac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Határozza meg az  $a \in (0, +\infty)$  értéket tudva azt, hogy az  $f$  függvény grafikus képének az

$A(a, f(a))$  pontjában húzott érintője párhuzamos az  $Ox$  tengellyel!

5p c) Bizonyítsa be, hogy  $\frac{\sqrt{x}}{x^2+3} > \frac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$ , bármely  $x \in (1, +\infty)$  esetén!

2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x + 2x}{e^x}$  függvény.

5p a) Igazolja, hogy  $\int_0^1 e^x f(x) dx = e$ .

5p b) Igazolja, hogy  $\int_{-1}^0 f(x) dx = -1$ .

5p c) Határozza meg azt az  $a$  valós számot, amelyre  $\int_0^1 F(x) f''(x) dx = \frac{a(e+1)}{e^2}$ , ahol az  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény az  $f$  függvénynek az a primitív függvénye, amelyre  $F(0) = 0$ .