Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Igazolja, hogy $3(4-i)+3i(1+i)=9$, ahol $i^2=-1$.

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$ függvény. Számítsa ki $(f\circ f)(2)$.

5p **3.** Oldja meg a valós számok halmazán a $\log_3\left(x^2-2x+4\right)=1$ egyenletet!

5p **4**. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott szám 10-zel osztható legyen!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(2,4)$ és a $B(3,a)$ pont, ahol a valós szám. Határozza meg az a valós számot tudva azt, hogy az O, A és B pontok kollineárisak!

5p **6.** Adott az $E(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$ kifejezés, ahol x valós szám. Igazolja, hogy $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ és az $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y & 4y\\ -2y & x-3y\end{pmatrix}$ mátrix, ahol x és y valós szám. .

5p **a)** Igazolja, hogy $\det(A(1,1))=0$.

5p **b)** Tudva azt, hogy az $A(x,y)$ mátrix invertálható, bizonyítsa be, hogy $|x|\neq|y|$.

5p **c)** Határozza meg az (m,n) egész számokból álló számpárokat, amelyekre $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.

2. Az $A=[0,+\infty)$ halmazon értelmezzük az $x\circ y=4^{xy}-(1-x-y)$ műveletet.

5p **a)** Igazolja, hogy $2\circ 0=2$.

5p **b)** Igazolja, hogy $x\circ\frac{1}{x}\geq 5$ bármely $x\in A$, $x\neq 0$ esetén!

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy ha az m és az n páratlan természetes szám, akkor az $m\circ n$ páratlan természetes szám!

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $f'(x)=\frac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Határozza meg az f függvény grafikus képének az $x=1$ abszcisszájú pontjában, az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy $x^3\geq 3\ln x+1$ bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=2$.

5p **b)** Igazolja, hogy $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+e^x\right)dx=\frac{e^2+1}{e}$.

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)dx\geq-\frac{2a}{e}$, bármely $a\in(0,+\infty)$ esetén!