

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică M_{mate-info}

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Határozza meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani halaédvány a_6 tagját, ha $a_1 = 3$ és $a_5 = 23$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$ függvény. Határozza meg az m valós számot tudva azt, hogy az $A(m, -1)$ pont rajta van az f függvény grafikus képén!
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $3^{2x-1} = 9 \cdot 3^{x+1}$ egyenletet!
- 5p** 4. Adott az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz. Határozza meg az A halmaznak az üres halmaztól különböző, legtöbb két elemet tartalmazó részhalmazainak számát!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(3, 1)$ és a $B(4, 4)$ pont. Határozza meg a C pont koordinátáit tudva azt, hogy $\overline{OA} = \overline{BC}$.
- 5p** 6. Adott az ABC , A -ban derékszögű háromszög, amelyben $AB = 6$ és a magasság $AD = 3$. Igazolja, hogy az ABC háromszög köré írt kör sugara $2\sqrt{3}$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} x & x & x \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -x & -1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det(A(1)) = 0$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $A(x) \cdot A(y) - A(xy) = (x + y - 2)A(0)$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p** c) Határozza meg azokat az x és y valós számokat, amelyekre $A(-1) \cdot A(3) \cdot A(x) = A(y)$.
2. Adott az $f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 + 3mX + m$ polinom, ahol m valós szám.
- 5p** a) Az $m = 2$ esetén igazolja, hogy $f(1) = 3$.
- 5p** b) Az $m = 0$ esetén határozza meg az f polinom gyökeit!
- 5p** c) Határozza meg azt az m racionális számot, amelyre $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ gyöke az f polinomnak!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3e^x}{x^2 + x + 1}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{3e^x(x^2 - x)}{(x^2 + x + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = +\infty$.
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy az $f(x) = m$ egyenletnek pontosan három megoldása van, bármely $m \in (e, 3)$ esetén!
2. Adott az $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x + \ln(x + 1)$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_1^2 (f(x) - \ln(x + 1)) dx = 9$.

5p b) Igazolja, hogy $\int_0^{e-1} \frac{f(x) - 6x}{x+1} dx = \frac{1}{2}$.

5p c) Határozza meg az a valós számot tudva azt, hogy a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2)$ függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $a\pi + \ln 2$.