

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. A $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladványban $b_2 = 2$ és $b_4 = 4$. Határozd meg a b_6 értékét!
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$ függvény, ahol m valós szám. Határozd meg azt az m valós számot, amelyre az f függvényhez tartozó parabola csúcsa az $y = 3x$ egyenesen van!
- 5p 3. Oldd meg a $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p 4. Határozd meg azoknak a háromjegyű természetes számoknak a számát, amelyeknek pontosan két egyenlő számjegyük van!
- 5p 5. Az AB és $A'B'$ szakaszoknak ugyanaz a felezőpontja. Igazold, hogy $\overline{AB'} + \overline{BA'} = \vec{0}$.
- 5p 6. Igazold, hogy bármely ABC háromszögben teljesül az $AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$ összefüggés, ahol R a háromszög köré írt kör sugara!

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b \\ y + z = 1 \end{cases}$ egyenletrendszer és az $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a és b valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(X(0,1)) = 1$.
- 5p b) Igazold, hogy bármely a és b egymástól különböző valós szám esetén, az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van!
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy ha az (x_0, y_0, z_0) az egyenletrendszer megoldása, akkor $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 3$, bármely a valós szám esetén!
2. Az $M = (2, +\infty)$ halmazon értelmezzük az $x * y = (x-1)^{\log_3(y-1)} + 1$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $5 * 10 = 17$.
- 5p b) Határozd meg a „ $*$ ” művelet semleges elemét!
- 5p c) Határozd meg az $x \in M$ számot, amelyre $x * x * x = x * x$.

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy az f függvény grafikus képeinek $x = 0$ abszcisszáju pontjába az f grafikus képehez húzott érintő párhuzamos az $x - \sqrt{3}y = 0$ egyenletű egyenessel!
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy az f függvénynek egyetlen szélsőértékpontja van!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 3} \right)$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 \left(2f(x) + \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx = \frac{\pi}{4}$.

- 5p** | **b)** Igazold, hogy az f függvény bármely F primitív függvénye szigorúan növekvő!
- 5p** | **c)** Igazold, hogy bármely a și b , $a < b$ valós szám esetén $\int_a^b f(x)F^2(x)dx > 0$, az f függvény bármely F primitív függvényére!