

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazolja, hogy  $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 0$ , ahol  $i^2 = -1$ .
- 5p 2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + ax - 5$  függvény, ahol  $a$  valós szám. Határozza meg az  $a$  valós számot, tudva azt, hogy az  $M(1,2)$  pont rajta van az  $f$  függvény grafikus képén!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a  $\log_4(x^2 + 1) = \log_4 x + \log_4(x + 1)$  egyenletet!
- 5p 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott szám osztható legyen 2-vel és 5-tel!
- 5p 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adottak az  $M(3,4)$ ,  $N(0,1)$  és  $P(3,0)$  pontok. Határozza meg annak a  $d$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P$  ponton, és párhuzamos az  $MN$  egyenessel!
- 5p 6. Az  $ABC$  háromszög  $C$ -ben derékszögű. Igazolja, hogy  $\operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$ .

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adottak az  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  és  $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ 3a & 0 & 2-3a \end{pmatrix}$  mátrixok, ahol  $a$  valós szám.

- 5p a) Igazolja, hogy  $\det(A(0)) = 8$ .
- 5p b) Határozza meg a  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  mátrixot, tudva azt, hogy  $aB = A(a) - 2I_3$  bármely  $a$  valós szám esetén!
- 5p c) Határozza meg az  $n$  természetes számot, amelyre  $\det(A(n) \cdot A(-n)) > 0$ .
2. A valós számok halmazán értelmezzük az  $x * y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$  asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy  $2 * 0 = 2$ .
- 5p b) Ha  $a$  és  $b$  olyan valós számok, amelyekre  $a \leq b$ , bizonyítsa be, hogy  $a * b = b$ .
- 5p c) Határozza meg az  $x$  valós számokat, amelyekre  $(2x) * (x^2 + 1) * (-2x) = 10$ .

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3}$  függvény.

- 5p a) Igazolja, hogy  $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Határozza meg az  $f$  függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a  $+\infty$  felé!
- 5p c) Határozza meg az  $a$  valós szám értékeinek halmazát, amelyekre az  $f(x) = a$  egyenletnek van megoldása!

2. Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 3}$  függvény.

5p a) Igazolja, hogy  $\int_0^2 (x^2 + x + 3) f(x) dx = 2$ .

5p b) Igazolja, hogy  $\int_1^2 g(x) dx = \ln \frac{9}{5}$ , ahol  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{2x+1}{x} \cdot f(x)$ .

5p c) Adottak az  $a$  és  $b$  valós számok, ahol  $0 \leq a < b$ . Minden  $n$  nullától különböző természetes szám esetén adott az  $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$  szám. Igazolja, hogy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .